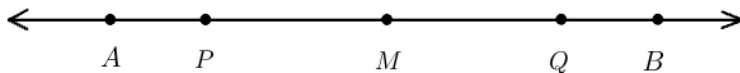


예제 7

도형의 구성
내분점과 외분점

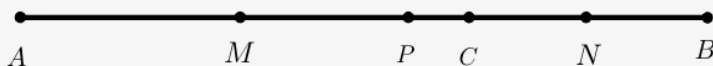
다음 그림과 같이 수직선 위에 5개의 점 A, P, M, Q, B 가 있다. 점 M 은 선분 AB 의 중점이고, $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AM}$, $\overline{QB} = \frac{1}{5}\overline{AB}$ 이다. 점 A 의 좌표가 a , 점 B 의 좌표가 b 일 때, 선분 PQ 의 중점을 좌표를 a 와 b 를 사용하여 나타내면 $ma + nb$ 이다. 이때 $60(m - n)$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} \text{점 } P \text{의 좌표는 } a + \overline{AP} &= a + \frac{b-a}{6} = \frac{5a+b}{6} \\ \text{점 } Q \text{의 좌표는 } b - \overline{QB} &= b - \frac{b-a}{5} = \frac{a+4b}{5} \\ \therefore \overline{PQ} &= \frac{a+4b}{5} - \frac{5a+b}{6} = \frac{-19a+19b}{30} \text{ 따라서 선분 } PQ \text{의 중점의 좌표는} \\ (P \text{의 좌표}) + \frac{1}{2}\overline{PQ} &= \frac{5a+b}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{-19a+19b}{30} = \frac{31a+29b}{60} \\ \therefore m &= \frac{31}{60}, n = \frac{29}{60} \text{ 즉 } 60(m-n) = 60 \times \left(\frac{31}{60} - \frac{29}{60} \right) = 60 \times \frac{2}{60} = 2 \end{aligned}$$

연습 12

길이가 81인 선분 AB 가 있다. 선분 AB 를 삼등분한 점 중에서 점 A 에 가까운 점을 A_1 , 점 B 에 가까운 점을 B_1 이라 하고, 선분 A_1B_1 을 삼등분한 점 중에서 점 A_1 에 가까운 점을 A_2 , 점 B_1 에 가까운 점을 B_2 라 하자. 이와 같은 과정을 반복할 때, 선분 A_4B 의 길이는?

연습 13



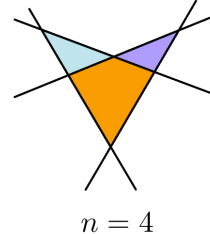
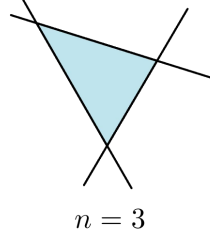
다음 그림에서 두 점 M, N 은 각각 두 선분 AC, BC 의 중점이고, 점 P 는 선분 MN 의 중점이다. 두 상수 x, y 에 대하여 $\overline{PC} = x\overline{AB} + y\overline{BC}$ 일 때, x, y 의 값을 각각 구하시오. (단, $\overline{AC} > \overline{BC}$)

예제 8

도형의 구성
요소의 개수

3 이상의 자연수 n 에 대하여 평면 위의 n 개의 직선 중에서 어떤 두 직선도 서로 평행하지 않고 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않는다. 이 n 개의 직선으로 만들어지는 유한한 영역의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(3) = 1, f(4) = 3$ 이다. 다음 물음에 답하시오.

- ① $f(5)$ 의 값을 구하시오.
② $f(13)$ 의 값을 구하시오.



(1) 5개의 직선에 의하여 그림과 같이 6개의 유한한 영역이 만들어 지므로 $f(5) = 6$

(2) $f(3) = 1, f(4) = 1 + 2 = 3, f(5) = 1 + 2 + 3 = 6$, 이므로

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2)$$

$$\therefore f(13) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = 66$$

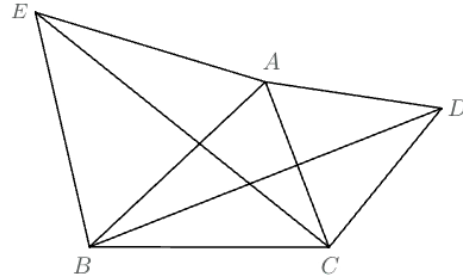
예제 11

도형의 이동
회전이동 (1)

$\triangle ABC$ 의 바깥쪽에 변 AB , AC 를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 ABE , ACD 를 그린다.

(1) $\triangle ABD$ 는 $\triangle AEC$ 를 회전 이동한 것임을 설명하시오.

(2) (1)의 회전각을 구하시오.

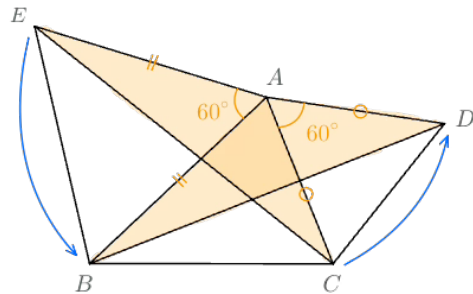


(1) $\triangle ABE$ 와 $\triangle ACD$ 는 정삼각형이기 때문에

$AB = AE$, $AD = AC$ 또한, $\angle EAB = 60^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$ 이다.

따라서 $\triangle AEC$ 를 점 A 를 회전의 중심으로 하여 반시계방향으로 60° 만큼 회전 이동하면 점 E 는 점 B 에, 점 C 는 점 D 와 겹치므로 $\triangle AEC$ 는 $\triangle ABD$ 와 겹치게 된다.

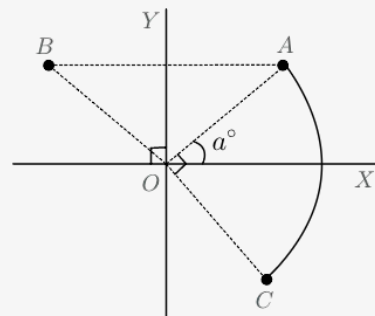
(2) 60°



연습 16

오른쪽 그림과 같이 수직인 2개의 직선 OX , OY 와 점 A 가 있다. 점 A 를 직선 OY 에 대하여 대칭으로 이동한 점 B , 점 A 를 점 O 를 중심으로 시계방향으로 90° 회전하여 이동한 점을 C 라고 하자.

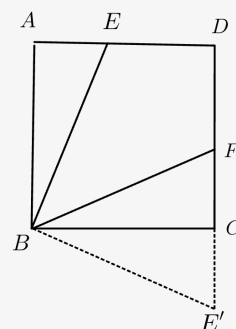
$\angle XO A = a^\circ$ 라고 할 때, 점 B 를 원점 O 를 중심으로 시계방향으로 얼마나 회전해야 C 와 겹치게 되는지 구하시오.



연습 17

그림의 정사각형 $ABCD$ 에서 $\angle EBF = 45^\circ$ 이고 E, F 는 각각 변 AD 와 CD 위에 있는 점이다.

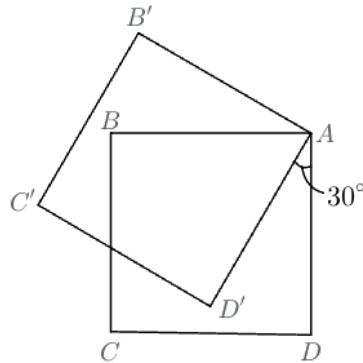
$\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{FC}$ 임을 증명하여라.



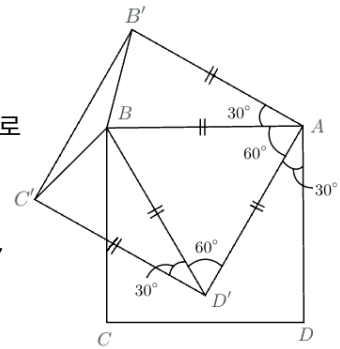
예제 12

도형의 이동
회전이동 (2)

오른쪽 그림과 같이 정사각형 $ABCD$ 를 점 A 를 중심으로 시계 방향으로 30° 회전시켜 정사각형 $AB'C'D'$ 을 만든다. $BB' = BC'$ 임을 증명하시오.

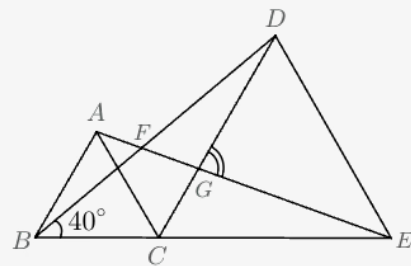


$\triangle ABB'$ 와 $\triangle D'BC'$ 에서 사각형 $AD'C'B'$ 는 정사각형이므로
 $AB' = D'C' \dots ①$
 $\triangle ABD'$ 는 $AB = AD'$ 이고 $\angle BAD'$ 가 60° 인 이등변삼각형 즉, 정삼각형이므로
 $AB = D'B \dots ②$
 $\angle BAB' = \angle BD'C' = 30^\circ \dots ③$
 ①~③로부터, 두 쌍의 변과 그 사이의 각이 각각 같으므로 $\triangle ABB' \equiv \triangle D'BC'$
 해당 변의 길이는 같으므로 $BB' = BC'$



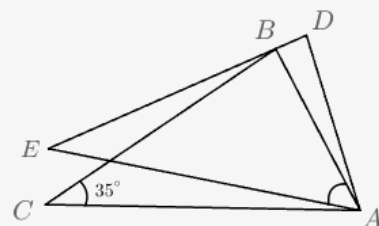
연습 18

오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DCE$ 는 정삼각형이다.
 또한 AE 와 BD , CD 의 교점을 각각 F , G 라 한다.
 $\angle FBC = 40^\circ$ 일 때, $\angle DGE$ 의 크기를 구하시오.



연습 19

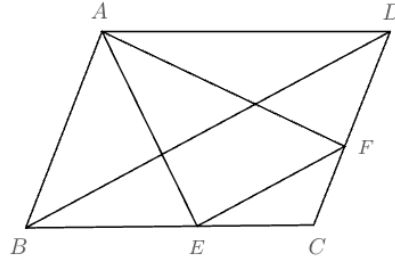
그림과 같이 $\angle C = 35^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 를 점 A 를 중심으로 10° 만큼
 회전시켜 $\triangle ADE$ 를 만들었다.
 점 B 가 변 DE 위에 있을 때, $\angle BAE$ 의 크기를 구하시오.



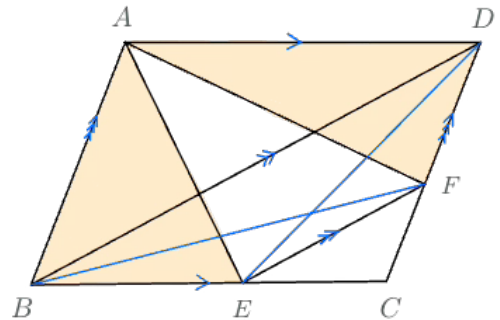
예제 7

특정변형
넓이 구하기 활용

□ $ABCD$ 에서 대각선 BD 에 평행한 직선을 그어 BC , CD 와의 교점을 각각 E , F 로 하자.
이 때, $\triangle ABE = \triangle AFD$ 임을 증명하시오.

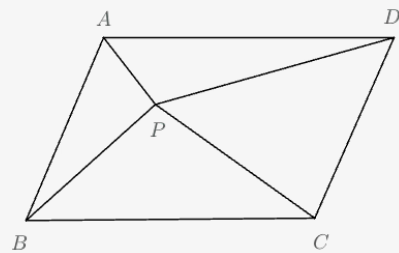


$AD \parallel BC$ 이므로 $\triangle ABE = \triangle DBE \dots ①$
또한 $BD \parallel EF$ 이므로 $\triangle DBE = \triangle DBF \dots ②$
 $AB \parallel DC$ 이므로 $\triangle DBF = \triangle AFD \dots ③$
①~③ 에서 $\triangle ABE = \triangle AFD$



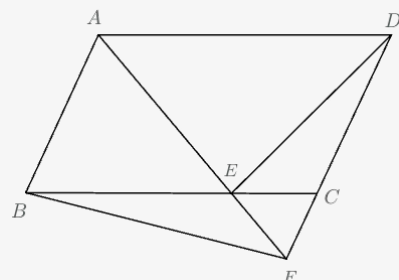
연습 12

□ $ABCD$ 의 내부에 한 점 P 를 잡는다. 이 때,
 $\triangle PAB + \triangle PCD = \frac{1}{2} \square ABCD$ 임을 증명하시오.



연습 13

□ $ABCD$ 에서 변 BC 위에 점 E 를 잡는다. AE 의 연장선과 DC 의 연장선과의 교점을 F 라 한다.
이 때, $\triangle BFC = \triangle DEF$ 임을 증명하시오.



예제 6

대수적 활용
등적변형

그림과 같이 x 축의 음의 부분에 있는 점 A 를 지나 기울기가 $\frac{2}{3}$ 인 직선이

$y = \frac{1}{3}x^2$ 과 두 점 B, C 와 만난다.

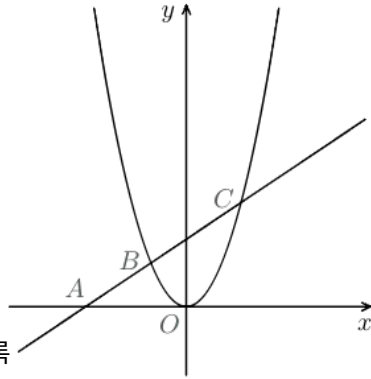
A, B, C 의 x 좌표를 각각 a, b, c 라고 하면 $a < b < 0 < c$ 이다.

$\triangle OAB : \triangle OBC = 4 : 5$ 일 때,

(1) $b^2 : c^2$ 을 구하시오.

(2) a, b, c 의 값을 구하시오.

(3) 점 D 를 이 포물선 위에 $\triangle OBC : \triangle DBC = 3 : 2$ 가 되도록 취한다. 이러한 점 D 의 x 의 좌표를 모두 구하시오.



(1) 주어진 넓이비로 부터 $AB : BC = 4 : 5 \dots \textcircled{1}$

따라서 오른쪽 그림에서 $\triangle ABB'$ 와 $\triangle ACC'$ 의
넓음비는 $AB : AC = 4 : 9$

$$\therefore BB' : CC' = \frac{1}{3}b^2 : \frac{1}{3}c^2 = b^2 : c^2 = 4 : 9$$

(2) (1)과 $b < 0 < c$ 에서

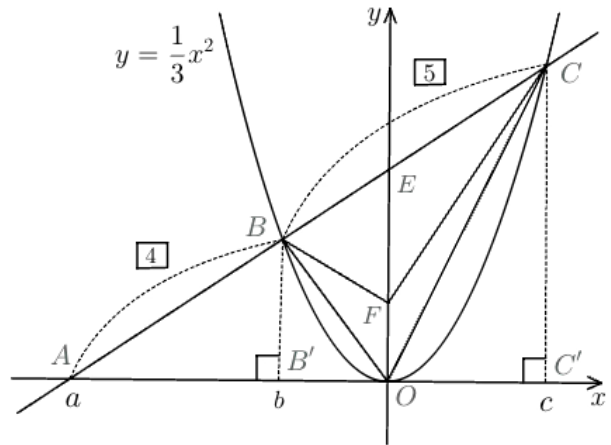
$$b : c = (-2) : 3 \quad \therefore 3b = -2c \dots \textcircled{2}$$

또한 BC 의 기울기에 대하여

$$\frac{1}{3} \times (b + c) = \frac{2}{3} \quad \therefore b + c = 2 \dots \textcircled{3}$$

②, ③에서 $b = -4, c = 6$,

$$\textcircled{1} \text{에서 } (-4 - a) : (6 + 4) = 4 : 5 \quad \therefore a = -12$$



(3) 직선 BC 의 절편은 $-\frac{1}{3} \times (-4) \times 6 = 8 \dots \textcircled{4}$

$E(0,8)$ 에서 $OE : FE = 3 : 2 \dots \textcircled{5}$ 가 되는 점 F 를 y 축 위에 잡으면

$\triangle OBC : \triangle FBD = 3 : 2$ ④에서, F 의 y 좌표는 $8 \pm 8 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3}, \frac{8}{3}$, F 를 통해 BC 와

평행한 직선과 포물선과의 교점이 D 이므로 x 좌표는 $\frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{40}{3}, \frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$,

$$x^2 - 2x - 40 = 0 \dots \textcircled{6}, x^2 - 2x - 8 = 0 \dots \textcircled{7}$$

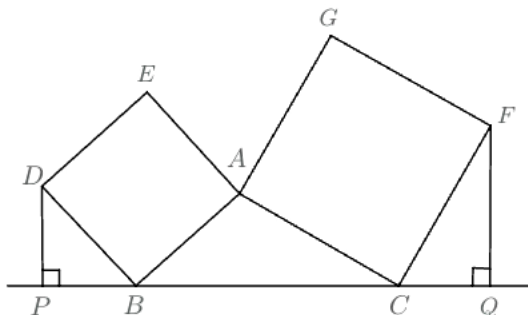
$$\textcircled{6} \text{에서 } x = 1 \pm \sqrt{41}, \textcircled{7} \text{에서 } (x+2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -2, 4$$

예제 7

사각형의 성질
 선분 길이에 대한 증명

$\angle B$ 와 $\angle C$ 가 모두 예각인 $\triangle ABC$ 의 두 변 AB , AC 를 각각 한변으로 하는 정사각형 $ABDE$, $ACFG$ 를 $\triangle ABC$ 의 바깥쪽에 만든다.

직선 BC 위에 두 점 D , F 로부터 각각 수직선 DP , FQ 를 그릴 때, $DP + FQ = BC$ 임을 증명하시오.



점 A 에서 변 BC 에 수직선 AR 을 그린다.

$\triangle BDP$ 와 $\triangle ABR$ 에서 가정으로부터 $\angle DPB = \angle BRA = 90^\circ \dots ①$

사각형 $ABDE$ 는 정사각형이기 때문에 $BD = AB \dots ②$

직각 삼각형 BDP 의 두 예각의 합은 90° 이므로

$\angle BDP = 90^\circ - \angle PBD$

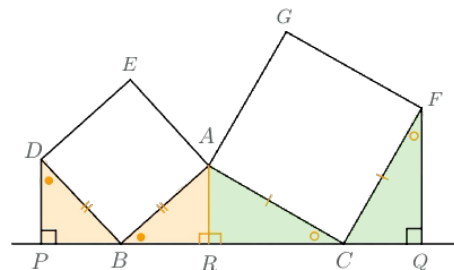
$\angle ABR = \angle PBR - \angle PBD - \angle DBA = 180^\circ - \angle PBD - 90^\circ$
 $= 90^\circ - \angle PBD$ 따라서 $\angle BDP = \angle ABR \dots ③$

①, ②, ③에서, 직각삼각형의 빗변과 하나의 예각이 각각 같기 때문에

$\triangle BDP \cong \triangle ABR$

따라서 $DP = BR$, 같은 방식으로 $\triangle FCQ \cong \triangle CAR$ 이므로 $FQ = CR$

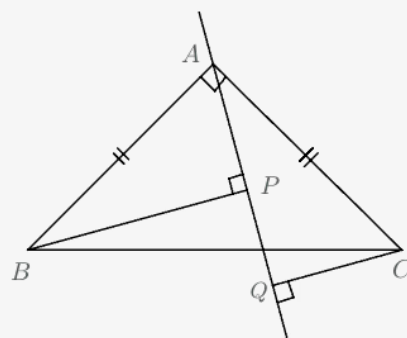
따라서 $DP + FQ = BR + CR = BC$



연습 13

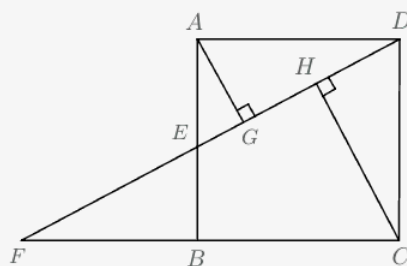
$AB = AC$ 의 직각 이등변삼각형 ABC 에서 직각의 정점 A 를 통과하는 직선에 점 B , C 로부터 수직선 BP , CQ 를 그린다.

이 때, $PQ = BP - CQ$ 임을 증명하시오.



연습 14

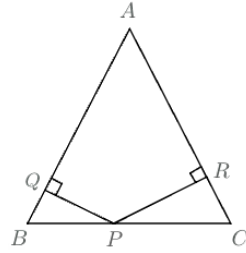
정사각형 $ABCD$ 에서 변 AB 위의 점 E 가 있고, 선분 DE 의 연장선과 변 CB 의 연장선의 교점을 F 라 하자. A , C 에서 선분 DE 에 수직선 AG , CH 를 그리면, $AG = EB$ 가 된다. $CH = FB$ 임을 증명하시오.



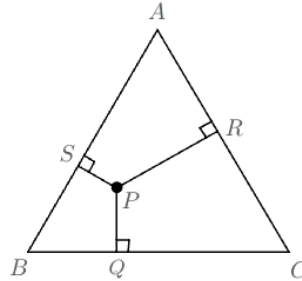
예제 8

삼각형의 성질
수직선 길이의 합

(1) $AB = AC$ 인 이등변삼각형 ABC 의 밑변 BC 위에 점 P 를 잡고, P 에서 AB , AC 에 내린 수직선을 각각 PQ , PR 이라 하자. 이 때, PQ , PR 은 P 가 변 BC 위의 어느 곳에 있더라도 일정하다는 것을 증명하시오.



(2) 정삼각형 ABC 의 내부에 점 P 를 두고, P 로부터 세 변 BC , CA , AB 에 그은 수직선을 각각 PQ , PR , PS 라 한다. 이 때, $PQ + PR + PS$ 는 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 어느 곳에서나 일정하다는 것을 증명하시오.



(1) 정점 B 에서 변 AC 에 수직선 BD 를 그리고 점 P 에서 BD 에 수직선 PS 를 그린다.

$\triangle ABC$ 에서 $AB = AC$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle ACB = \angle QBP \dots ①$

또한 $AC \parallel SP$ 에서 동위각으로 같기 때문에 $\angle ACB = \angle SPB \dots ②$

①, ②에서 $\angle QBP = \angle SPB \dots ③$

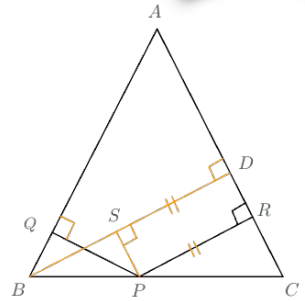
$\triangle QBP$ 와 $\triangle SPB$ 에서 $\angle BQP = \angle PSB = 90^\circ \dots ④$

공통선분으로 $BP = PB \dots ⑤$

③, ④, ⑤로부터 직각삼각형의 빗변과 한 예각이 각각 같기 때문에 $\triangle QBP \cong \triangle SPB$ 이다.

따라서 $PQ = BS$, 또한 사각형 $PRDS$ 는 직사각형이기 때문에 $PR = SD$

따라서 $PQ + PR = BS + SD = BD$



(2) 그림과 같이 점 P 를 지나 변 BC 에 평행한 직선과 변 AB , AC 와의 교점을 각각 D , E 라 한다.

$DE \parallel BC$ 에서 동위각은 같으므로 $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle C$

$\triangle ABC$ 는 정삼각형이므로 $\angle B = \angle C$ (60°) 이기 때문에 $\angle ADE = \angle AED$ 이다.

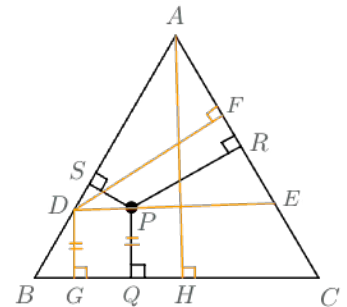
$\triangle ADE$ 는 $AD = AE$ 인 이등변삼각형이므로 점 D 에서 변 AE 에 내린 수직선을 DF 라 하면 (1)에 의해 $PS + PR = DF \dots ①$

점 D 에서 변 BC 에 대한 수직선을 DG 라고 하면, 사각형 $DGQP$ 는 직사각형이기 때문에

$PQ = DG \dots ②$

$\triangle CAB$ 는 $CA = CB$ 인 이등변삼각형이므로, 점 A 에서 변 BC 에 그은 수직선을 AH 라 하면 (1)에 의해 $DF + DG = AH \dots ③$, ①, ②, ③에서 $PQ + PR + PS = AH$

선분 AH 의 길이는 일정하므로, $PQ + PR + PS$ 는 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부 어디에 있더라도 일정하다.



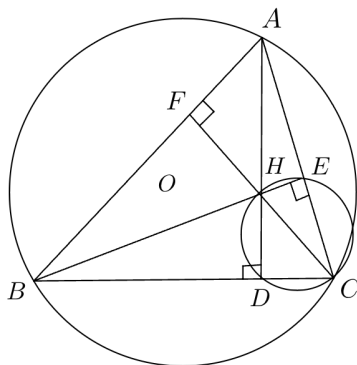
연습 15

넓이에 초점을 맞추어 예제 8의 (2)를 증명하시오.

예제 3

삼각형의 여러 정리
사인, 코사인 법칙

삼각형 $\triangle ABC$ 의 수심을 H 라 할 때, $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$ 의 외접원의 반지름이 모두 같음을 보이시오.



$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름을 R 이라고 하면 사인법칙에 의해서

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$$

H, D, C, E 가 공원점이므로 $\angle BHA = \angle EHD = 180^\circ = C$

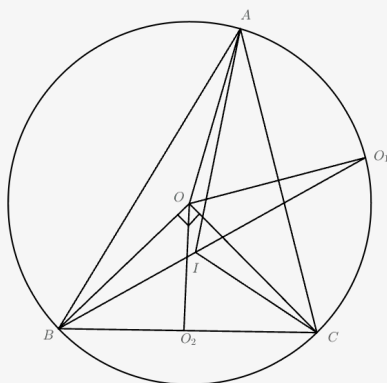
$$\triangle ABH \text{에서 } \frac{AB}{\sin(180^\circ - C)} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$$

$$\text{같은 방법으로 } \triangle BCH \text{에서 } \frac{BC}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$\triangle CAH \text{에서 } \frac{AC}{\sin(180^\circ - B)} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$$

연습 4

삼각형 ABC 의 외심을 O 라 하고 삼각형 OAC 와 OBC 의 외심을 각각 O_1 , O_2 라 하자. 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름이 10이고, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ 일 때, $O_1O_2 = d$ 이다. $(d - 5)^2$ 의 값을 구하시오.

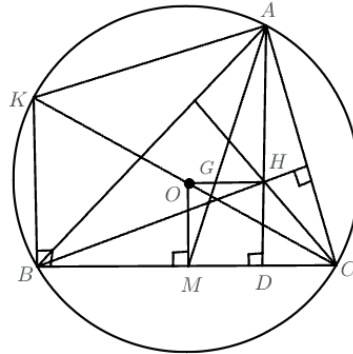


예제 4

삼각형의 여러 정리
오일러 직선

$\triangle ABC$ 의 수심을 H 라 하자. $\triangle ABC$ 의 외접원의 중심을 O 라 하고, O 에서 BC 에 내린 수선의 발을 M 이라 하자. $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G 라 할 때 다음을 증명하시오.

- (1) $OM = \frac{1}{2}AH$ (세르보어 정리)
- (2) O, G, H 는 일직선 위에 있다.



점 B 에서 BC 에 수직이고 원과 만나는 점을 K 라 하자.

- (1) $\angle KBC = 90^\circ$ 이므로 KC 는 원의 지름이다.

따라서 $\angle KAC = 90^\circ$ 이다. 그러므로 $KA \parallel HB$ 이고 $\square KBHA$ 는 평행사변형이다.

$$\therefore KB = AH$$

직각삼각형 KBC 에서 $KB \parallel OM$ 이고 M 은 BC 의 중점이므로 $OM = \frac{1}{2}AH$ 이다.

- (2) 선분 OH 와 AM 이 만나는 점을 G 라 하자.

$\triangle OGM$ 과 $\triangle HGA$ 는 닮음비가 1 : 2 인 닮음 삼각형이다.

$AG : GM = 2 : 1$ 이므로 점 G 는 삼각형 ABC 의 무게중심이다.

$\therefore O, G, H$ 는 일직선 위에 있다.

연습 5

삼각형 ABC 의 외심을 O , 수심을 H , 변 AC 의 중점을 D 라고 하자. 직선 BO 가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 또 다른 점을 E 라고 할 때, 세 점 H, D, E 가 동일 직선 위에 있음을 보이시오.

